STAT0041: Stochastic Calculus

Lecture 3 - Discrete-time Martingale

Lecturer: Weichen Zhao　　Fall 2025

Key concepts:

- *Martingale.*

鞅过程的研究起源并发展于法国，Martingale 也源自于法语，具有两个意思，其一是赌博中的倍赌策略，这种词义没有简洁的中文翻译；其二是指一种套在马脖子上使得马头不能猛烈上扬的那根缰绳，意思刚好与汉语中的“鞅”吻合，所以现在这个词的通用中译是借用第二种意思的中文表示。

3.1　离散时间鞅的定义

动机. 研究鞅过程的动机源于赌博游戏的公平性，具体的有下面例子：

Example 3.1 (公平赌局) 考虑一个简单赌博模型，赌徒会根据之前赌局的结果来决定本次赌局下注的金额，记 ξ_0 为赌局开始时的本金，ξ_n为第n次赌博结束后的赌金。令

$$\eta_n \triangleq \begin{cases} 1 & \text{赢下第}n\text{次赌局;} \\ -1 & \text{输掉第}n\text{次赌局.} \end{cases}$$

为$i.i.d.$随机变量序列，满足

$$\mathrm{P}(\eta_n = 1) = p,\ \mathrm{P}(\eta_n = -1) = 1 - p = q$$

设 *Borel* 函数(如果对于每一个*Bore*集 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\mathbb{B}) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$) $f_n(\xi_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1})$为第 n 次赌局的下注策略，那么第 n 次赌局后的赌金为

$$\begin{aligned} \xi_n &= \xi_{n-1} + f_n(\xi_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}) \cdot \eta_n \\ &= \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} f_k(\xi_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{k-1}) \cdot \eta_k. \end{aligned}$$

赌徒知道前 n 次赌局的结果条件下，$n+1$ 次赌局后赌金的期望为

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_n]\\&=\mathbb{E}[\xi_n+f_{n+1}(\xi_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\cdot\eta_{n+1}|\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_n]\\&=\xi_n+f_{n+1}(\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_n)\mathbb{E}[\eta_{n+1}].\end{aligned}$$

我们希望这个赌局是公平的，即，在任意的时刻 n，预测时刻 $n+1$ 时的“输赢情况”，不论是取什么样的博弈“策略”，都不可能得到任何关于“输赢情况”的信息。这即是：

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_n]=\xi_n.$$

当$p=q=\frac{1}{2}$时，$\mathbb{E}[\eta_{n+1}]=0$，那么无论采取什么样的策略f_{n+1}，这个简单赌博模型都是“公平”的。

这就产生了以下定义：

Definition 3.2 (鞅) 令$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n),\mathrm{P})$, $n=0,1,\dots$ 为带滤子流的概率空间，$X=(X_n)$为$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n),\mathrm{P})$上适应过程，满足 $\mathbb{E}[|X_n|]<\infty$，称$X=(X_n)$为

(1) 一个$\mathscr{F}_n$-鞅 *(martingale)*，如果 $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]=X_n$;

(2) 一个$\mathscr{F}_n$-上鞅 *(supermartingale)*，如果 $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]\le X_n$;

(3) 一个$\mathscr{F}_n$-下鞅 *(submartingale)*，如果 $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]\ge X_n$.

注1. 鞅的定义依赖于滤子流，过程关于大的适应流是鞅，蕴含关于小的适应流是鞅，自然的，一个鞅过程关于其自然σ-代数流总是鞅。

注2. 由鞅的定义易知：

(1) 鞅的全体构成线性空间；

(2) 鞅的期望 $\mathbb{E}[X_n]$ 关于 n 不变；

(3) 由 Jensen 不等式，如果 $X=(X_n)$ 是鞅，ϕ 是凸函数，那么若 $\phi(X)$ 可积，则 $(\phi(X))_n$ 是下鞅。

3.2 例子

本小节我们通过一些例子理解鞅过程。

Example 3.3 (Doob 鞅) 令$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathrm{P})$ 为带滤子流的概率空间，X为一个可积随机变量($\mathbb{E}|X|< \infty$)。定义

$$X_n \triangleq \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n].$$

那么X_n为一个$\mathscr{F}_n$-鞅。

Proof: 对于任意n，由于

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] = X_n.$$

所以X_n为一个$\mathscr{F}_n$-鞅。 ∎

Example 3.4 (鞅变换) 令$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathrm{P})$ 为带滤子流的概率空间，设(C_n), $n = 0, 1, \ldots$为一个随机变量序列。我们称(C_n)是可料的(predictable)，如果对所有$n \geq 1$，C_n是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的。令(X_n)为一个$\mathscr{F}_n$-鞅，(C_n)为一个一致有界的$\mathscr{F}_n$-可料过程，定义(X_n)关于(C_n)的鞅变换(martingale transform)为

$$Y_n \triangleq \sum_{k=1}^{n} C_k(X_k - X_{k-1}),\ k \geq 1, \quad Y_0 = 0.$$

那么 Y_n 为一个 $\mathscr{F}_n$-鞅。

Proof: 由于

$$|Y_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |C_k||X_k - X_{k-1}| \leq K \sum_{k=1}^{n} |X_k - X_{k-1}|$$

所以 Y_n 是可积的。由于 C_k 和 $X_k - X_{k-1}$ 是$\mathscr{F}_k$-可测的，所以 Y_n 是 $\mathscr{F}_n$-可测的，又

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}[C_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathscr{F}_n] \\ &= C_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n] = 0.\end{aligned}$$

所以 $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathscr{F}_n] = Y_n$，即$Y_n$ 为一个 $\mathscr{F}_n$-鞅。 ∎

注1. 本质上，这是离散时间情形下，随机可料序列关于鞅的随机积分。

注2. 鞅变换的实际含义：假设市场上有一个价格为 (X_n) 的风险资产，和一个利率为 r 的理财产品，考虑一个初始资产为 Y_0 的投资人的资产变化过程。

一个投资策略是指在时刻 $n-1$ 决定第 n 时段持有 C_n 份风险资产，剩下的资金购买理财产品，那么 $n-1$ 时的资产总额为

$$Y_{n-1} = C_n X_{n-1} + (Y_{n-1} - C_n X_{n-1}).$$

那么在 n 时刻

$$\begin{aligned}
&Y_n = C_n X_n + (1+r)(Y_{n-1} - C_n X_{n-1}) \\
\Longleftrightarrow\ &Y_n - (1+r)Y_{n-1} = C_n(X_n - (1+r)X_{n-1}) \\
\Longleftrightarrow\ &(1+r)^{-n}Y_n - (1+r)^{-(n-1)}Y_{n-1} = C_n[(1+r)^{-n}X_n - (1+r)^{-(n-1)}X_{n-1}].
\end{aligned}$$

可以看出折现后的资产变化过程$(1+r)^{-n}Y_n$是折现后风险资产价格过程$(1+r)^{-n}X_n$ 关于C_n的鞅变换。

Example 3.5 (倍赌策略) *考虑例 3.1 中的简单赌博模型，令$p=q=\frac{1}{2}$，在任意的时刻 n 时，预测时刻 $n+1$ 时的“输赢情况”，不论是取什么样的博弈“策略”，都不可能得到任何关于“输赢情况”的信息。考虑采取每次把赌注翻倍直到第一次赢的策略，这样的下注策略称为倍赌策略(Martingale betting strategy)。具体地*

$$f_1(\xi_0) = 1,$$

$$f_2(\xi_0, -1) = 2,\ f_2(\xi_0, 1) = 0,$$

$$f_3(\xi_0, -1, -1) = 4, f_3(\xi_0, -1, 1) = 0, f_3(\xi_0, 1, -1) = 0, f_3(\xi_0, 1, 1) = 0, \ldots$$

$$f_n(\xi_0, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{n-1}) = 2^{(n-1)},\ f_n(\xi_0, \text{其余情况}) = 0.$$

由于$p=q=\frac{1}{2}$，即(ξ_n)为一个鞅。记赌徒在时刻 n 才第一次取胜的事件为：

$$A_n \triangleq \{\eta_1 = -1, \cdots, \eta_{n-1} = -1, \eta_n = 1\}$$

那么

$$A_n = \{\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \cdots, \xi_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1},\ \ \xi_n = \xi_{n-1} + 2^{n-1}, \xi_{n+k} = \xi_n, k \geq 1\}.$$

事件 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 表示赌徒迟早会赢得赌局，赢钱后停止下注。由于

$$\mathrm{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

这说明，即使这个赌局是“公平”的，依然存在倍赌策略，能够保证赌徒只赢不输。那么这是否和我们希望的“公平”矛盾呢？

这个问题正是下节课 Doob 停止定理要回答的。